Progetto Olimpiadi della Matematica

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale ad x.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:
  $\sqrt{3} \approx 1,7321$ $\sqrt{5} \approx 2,2361$ $\sqrt{7} \approx 2,6458$ $\pi \approx 3,1416$.

2 marzo 2018

Gara a Squadre – Testi dei problemi

1. *Un nuovo inizio*

Emanuele Ma hanno lasciato il titolo sbagliato della versione passata?

Veronica No, è giusto: MASTERMATH. (*Emanuele resta senza parole*)

Chef Pino Bastardich Benvenuti! La prima prova vi richiede di utilizzare la seguente ricetta: sia n un intero maggiore di 2 e minore di 9999.

(i) Si divide n per 2.

(ii) Si trovano i fattori primi di n e si seleziona il minimo m tra questi.

(iii) Si eleva m al quadrato.

(iv) Al risultato si sottrae 1 e si ottiene r.

(v) Se il numero r è pari si ripete la ricetta dal punto (i).

Qual è il più grande numero r che si ottiene al punto (v) a cui non si applica il punto (i)?

Veronica (*Rivolto a Emanuele*) Ti avevo detto che il nome era giusto.

2. *Spettatori*

I parenti dei concorrenti sono sistemati in una sala davanti a un grande schermo che proietta le fasi del programma: le poltrone di ogni fila sono numerate da 1 a 10, le file sono numerate con le lettere dell'alfabeto italiano da `A` *a* `L`*, la fila* `A` *è la prima davanti allo schermo. La sala è piena, è chiaro al regista che gli spettatori si dividono tra onesti—che dicono sempre la verità—e bugiardi—che mentono sempre.*

Regista Dobbiamo testare l'impianto sonoro fila per fila: dite qualcosa.

Tutti quelli seduti nella fila `L` Lo spettatore nella poltrona con lo stesso numero della mia nella fila davanti a me è un bugiardo!

Tutti quelli seduti nella fila `I` Lo spettatore nella poltrona con lo stesso numero della mia nella fila davanti a me è un bugiardo!

$\vdots$

Tutti quelli seduti nella fila `B` Lo spettatore nella poltrona con lo stesso numero della mia nella fila davanti a me è un bugiardo!

Tutti quelli seduti nella fila `A` Gli spettatori nella poltrona con lo stesso numero della mia nelle file dietro alla mia sono bugiardi.

Voce fuori campo QUANTI SONO I BUGIARDI NELLA SALA?

3. *Prova in esterna*

Regista La prova in esterna durerà tre giorni a Tegorìa Soprana.

Produttore I tre giorni devono cadere tra aprile e maggio.

Regista Dobbiamo fare in modo che non cadano il 12 maggio, ho un impegno improrogabile.

Produttore (*Sospira*) Molto bene, fisso le date e te le dico domani. (*Se ne va.*)

Regista (*Rimasto solo*) Mi sono sbagliato: l'impegno improrogabile è il 21 maggio, non il 12 maggio!

Voce fuori campo QUAL È LA PROBABILITÀ CHE IL PRODUTTORE FISSI LA GITA IN MODO CHE IL REGISTA POSSA ESSERE PRESENTE?

[*Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione, ridotta ai minimi termini, che è la probabilità richiesta.*]

4. *Olio bollente 3*

Ludovico (*Sottovoce a Emanuele*) Considera una funzione f reale di variabile reale tale che, per ogni numero x, vale che $f(x) - f(x-2) = \frac{1}{5}x - 200$. Sapendo che $f(0) = 0$, quanto vale $f(2018)$? (*Emanuele urla perché, distraendosi per ascoltare Ludovico, si è scottato con l'olio bollente.*)

5. ***Pane***

Chef Federico Polero Dovete preparare il pane: la pasta ha una massa di 1 kg ed è uniforme, con un volume di 1 dm^3. La dovete far lievitare: all'n-esima lievitazione il volume aumenta di $1/n$ rispetto al volume prima della lievitazione. Dopo ogni lievitazione, al fine di determinare il grado di lievitazione migliore per fare il pane, rimuovete un decimo della massa (iniziale) dalla pasta, cioè 1 hg. Poi rimettere a lievitare quella rimanente.

Voce fuori campo QUANTO È IL VOLUME IN cm^3 DELLA PASTA RIMANENTE AL TERMINE DELLA DECIMA LIEVITAZIONE?

6. ***Cartoncini***

In cucina ci sono 2018 concorrenti; sulla schiena di ognuno viene attaccato un cartoncino di colore verde o rosso.

Chef Bobo Dvornicciuolo Chi riuscirà a vedere 587 cartoncini verdi sulla schiena di altrettante persone, riceverà il peperoncino come ingrediente; gli altri riceveranno la soia.(*I concorrenti si muovono cercando cartoncini verdi e dichiarano i nomi di tutti quelli che hanno trovato*)

Veronica (*Commentando il risultato con Emanuele*) Ho avuto il peperoncino.

Emanuele Beata te! A me è toccata la soia.

Voce fuori campo QUANTI CONCORRENTI HANNO RICEVUTO IL PEPERONCINO?

7. ***Olio bollente 4***

Ludovico (*Sottovoce a Emanuele*) Diciamo che un numero reale è *semi-intero* se il suo doppio è intero. Fissa s_1 e s_2 due semi-interi tali che $s_1 + s_2 = \frac{153}{2}$ e $s_1 \cdot s_2 = 1368$. Qual è la somma dei numeri interi compresi tra $|s_1 - s_2|$ e $s_1 + s_2$?

Emanuele (*Prendendo un mestolo e immergendolo nell'olio bollente*) Vorrei saperlo anch'io!

8. ***Pelapatate***

Emanuele (*Rivolto a Ludovico che sta sbucciando patate*) In un rettangolo di lati 30 m e 60 m sono inserite due circonferenze identiche, tangenti tra loro e ciascuna tangente a tre lati del rettangolo. Tracciando la diagonale si forma su ciascuna circonferenza una corda. Quanti centimetri misura la più lunga delle due? (*Ludovico si affetta un dito con il pelapatate.*)

9. ***Piatti equilibrati***

Chef Pino Bastardich Nella dispensa sono disponibili dodici ingredienti: 4 sapidi, 3 dolci, 2 croccanti, 3 morbidi. Perché un piatto sia equilibrato ci devono essere lo stesso numero di ingredienti sapidi e ingredienti dolci e lo stesso numero di ingredienti croccanti e di ingredienti morbidi. Per preparare un piatto serve almeno un ingrediente.

Luigi Amedeo È logico, chef!

Voce fuori campo QUANTI PIATTI EQUILIBRATI SI POSSONO FARE?

10. ***Gesti***

Ludovico (*Sottovoce a Luigi Amedeo*) Qual è il più grande numero naturale n tale che n^2 è il prodotto di tre fattori, diversi tra loro e tutti inferiori a 100? (*Luigi Amedeo risponde a gesti.*)

11. ***Uovo 1***

Luigi Amedeo (*Sottovoce a Ludovico*) Scomponi il polinomio $x^8 + 31x^4 + 256$ come prodotto di 4 polinomi a coefficienti reali, tutti dello stesso grado! (*L'uovo che ha in mano Ludovico cade a terra.*)

[*Dare come risposta la somma dei valori assoluti dei coefficienti dei quattro polinomi trovati moltiplicata per* 100.]

12. ***Mistery Box***

Chef Bobo Dvornicciuolo Nella Mistery Box ci sono 100 palline, numerate da 1 a 100. (*Rivolto a Ludovico e Emanuele*) Oggi (*fa una pausa*) uno di voi (*fa un'altra pausa*) sarà eliminato. Ludovico estrae una pallina, ci mostra il numero sulla pallina, dopodiché la rimette nella Mistery Box. Poi Emanuele ne estrae due. Emanuele viene eliminato se la media tra i valori sulle palline che ha estratto è esattamente uguale al valore riportato sulla pallina che aveva estratto Ludovico.

Emanuele (*Guardando le palline che ha estratto*) Sono eliminato!

Voce fuori campo QUAL ERA LA PROBABILITÀ CHE EMANUELE FOSSE ELIMINATO?

[*Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione, ridotta ai minimi termini, che è la probabilità richiesta.*]

13. ***Libro di ricette***

Luigi Amedeo Hai visto che dal libro di ricette di Pellegrino Arsanti hanno strappato il capitolo sui rifreddi?

Veronica Sì. Ho notato anche che ogni capitolo è di 14 pagine, il libro era di 336 pagine, e la somma dei numeri delle pagine rimaste è 53571.

Voce fuori campo QUAL È LA PRIMA PAGINA DEL CAPITOLO STRAPPATO?

14. ***Pesca***

Chef Federico Polero Ludovico, Francesco, dobbiamo decidere chi va in dispensa! (*Rivolto a Ludovico*) Pesca due numeri distinti in questo sacchetto che contiene quattro palline numerate 1, 2, 3 e 4. (*Rivolto a Francesco*) Pesca una pallina da quest'altro sacchetto che contiene nove palline numerate da 1 a 9. Vince Francesco se il numero che ha pescato è maggiore della somma dei due numeri pescati da Ludovico.

Voce fuori campo QUAL È LA PROBABILITÀ CHE VINCA FRANCESCO?

[*Dare la risposta come somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*]

15. ***Uovo 2***

Ludovico (*Sottovoce a Luigi Amedeo*) All'interno di un triangolo isoscele di base 294 mm e altezza 196 mm è costruito un quadrato che ha due vertici su un lato obliquo, uno sulla base e il quarto sull'altro lato obliquo. Quanto vale l'area del quadrato in cm^2? (*Luigi Amedeo si concentra, Ludovico gli infila un uovo nella tasca del grembiule.*)

16. ***Scherzo***

Francesco Prendi un polinomio di quarto grado monico. (*Rivolto a Ludovico che sta saltando alcuni scampi*) Diciamo $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$. Sai che $p(1) = 1$, $p(2) = 4$, $p(3) = 9$, $p(4) = 16$. (*Ludovico si distrae e lascia cadere la padella sul fuoco.*)

Chef Pino Bastardich (*Urlando*) Ludovico, che cosa diavolo stai facendo? Dove credi di essere? Alle Olimpiadi della Matematica? Se ti distrai il tuo piatto muore e tu sei morto.

Francesco Quanto vale $p(5)$? (*Ludovico sviene.*)

17. ***In cucina***

Chef Alessandra Krucnann (*Si aggira tra i concorrenti ai fornelli; parla tra sé e sé*) A quali concorrenti mi rivolgo? Forse è meglio che vada a caso per non fare favoritismi. Prima di spostarmi di due metri, per scegliere in che direzione muovermi, lancio il dado a 4 facce che ho in tasca: se esce 1, vado di due metri verso la parete a Nord; se esce 2, vado di due metri verso la parete a Ovest; se esce 3, vado di due metri verso la parete a Sud; se esce 4, vado di due metri verso la parete a Est. (*Dopo aver fatto nove lanci e relativi spostamenti, guarda il concorrente davanti a cui è arrivata: è Francesco*) Sono arrivata a 10 metri in linea d'aria dal punto da cui ero partita.

Voce fuori campo QUAL ERA LA PROBABILITÁ CHE, ESATTAMENTE DOPO 9 SPOSTAMENTI DI DUE METRI, CHEF ALESSANDRA KRUCNANN FOSSE A 10 METRI DA DOVE ERA PARTITA?

[*Dare come risposta il numeratore della frazione, ridotta ai minimi termini, che è la probabilità cercata.*]

18. ***Struttura della squadra***

Chef Federico Polero Ludovico, con la tua squadra hai preparato ottimi pasticcini, ma ora dovete predisporre una struttura in cui incasellare tutti i pasticcini che avete preparato. Per prepararla avete a disposizione bastoncini lunghi 10 cm che potete unire a tre a tre usando i 32 snodi appositi che vi abbiamo fornito che permettono di unire tre bastoncini, ciascuno ortogonale a ciascun altro. Attenzione! Dovete ***sempre*** usare tre bastoncini con uno snodo, altrimenti questo non li blocca insieme e la struttura crolla, come pure ogni bastoncino deve avere uno snodo a ciascuna delle sue due estremità. Preparate una struttura come vi ho appena spiegato che possa essere chiusa all'interno di questa scatola trasparente a forma di parallelepipedo retto la cui dimensione minima è di 10 cm. Poi vi spiegheremo come incasellare i pasticcini.

Voce fuori campo QUAL È LA MASSIMA DISTANZA IN MILLIMETRI CHE PUÒ INTERCORRERE, IN LINEA D'ARIA, TRA I VERTICI DI DUE SNODI DI UNA STRUTTURA CHE RISPETTA TUTTE LE CONDIZIONI RICHIESTE DA CHEF FEDERICO POLERO?

19. ***Dadi***

Veronica ha un comune dado con le sei facce bianche. Vuole riempire ciascuna delle sei facce con un numero da 1 *a* 9 *in modo che la somma delle facce opposte sia costante e due facce diverse non abbiano lo stesso numero.*

Voce fuori campo QUANTI DADI PUÒ GENERARE VERONICA A MENO DI ROTAZIONI?

20. ***Fagioli 1***

Veronica e Ludovico stanno rilassandosi vicino alla dispensa. Ciascuno ha preso tre sacchetti di fagioli: uno con duecento fagioli rossi, uno con duecento fagioli gialli, uno con duecento fagioli verdi. Contemporaneamente ciascuno dei due prende dai propri sacchetti 9 *fagioli come vogliono, poi confrontano quanti fagioli hanno per ciascun colore. Ogni volta che, nel confronto per un dato colore, uno ha più fagioli dell'altro fa un punto. Vince chi ha maggiore la somma dei punti fatti nei tre confronti.*

Chef Alessandra Krucnann Ma usano qualche strategia?

Chef Bobo Dvornicciuolo No, nessuna; lo fanno solo per passare il tempo. Useranno strategie in cucina.

Voce fuori campo QUAL È LA PROBABILITÀ CHE VINCA LUDOVICO?

[*Dare la risposta come somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*]

21. ***Distrazione***

Francesco e Veronica sono insieme al Luna Park a distrarsi dopo una giornata ai fornelli. Passano davanti allo stand del tiro a segno.

Francesco (*Rivolto a Veronica*) Ti sfido al tiro a segno.

Gestore del tiro a segno I tiri a disposizione sono 10. Le regole di attribuzione del punteggio sono le seguenti: non appena il giocatore fa un centro gli viene attribuito un punto; se al tiro dopo fa nuovamente centro, gli vengono assegnati due punti, e così via finché non sbaglia. Un eventuale centro successivo vale un solo punto, e la successione ricomincia. Ad esempio se un giocatore fa 5 centri di fila, poi sbaglia un tiro, e in seguito fa nuovamente 4 centri, ottiene un punteggio di $1+2+3+4+5$ con la prima serie, e di $1+2+3+4$ con la seconda: il punteggio totale è di 25 punti. (*Francesco e Veronica giocano entrambi, ottenendo esattamente lo stesso punteggio.*)

Francesco (*Irritato*) Non è giusto però, io ho fatto tre centri in più di te!

Veronica Le regole sono regole! È inutile che ti lamenti.

Voce fuori campo QUALI SONO IL MINIMO E IL MASSIMO PUNTEGGIO CHE POSSONO AVER TOTALIZZATO I DUE AMICI?

[*Nella risposta si indichino i due valori, il minimo nelle prime due caselle e il massimo nelle seconde due.*]

22. ***Senza senso***

Chef Alessandra Krucnann Attenti: la lettera n indica un numero intero compreso tra 1 e 10000, estremi esclusi. Considerate le seguenti frasi:

(1) Il numero n è divisibile per il numero di frasi vere.

(2) Se la frase successiva è falsa, allora n è potenza di un numero primo.

(3) Le frasi precedenti a questa sono tutte vere e la somma delle cifre di n è minore di 9.

(4) Ci sono più frasi vere dopo di questa che prima di questa.

(5) La cifra delle unità di n è il numero della prima frase falsa.

(6) Le frasi dispari sono false oppure n è minore di 2018.

Veronica Ma la frase (5) non ha senso!

Chef Alessandra Krucnann Hai ragione, Veronica! Non vi ho detto che non tutte le frasi sono vere. Però vi assicuro che le frasi vere sono di più delle frasi false. Così le sei frasi non sono contraddittorie e le varie possibilità determinano alcuni valori di n. Mi sapete dire il più grande e il più piccolo di questi valori?
[*Dare come risposta la somma dei due valori.*]

23. ***Torta di compleanno***

Chef Bobo Dvornicciuolo Perché il tuo dolce si chiama "torta di compleannno"?

Ludovico Perché va bene per tutti i compleanni da uno a quindici.

Chef Bobo Dvornicciuolo Ecco perché è piena di numeri! La torta sembra una scacchiera quadrata otto per otto. In ogni quadratino ha scritto un numero: nel riquadro in alto a sinistra c'è 1; poi spostandoti verso destra hai scritto il numero precedente aumentato di 1 e così via, come pure spostandoti verso il basso hai scritto il numero sopra aumentato di 1.

Ludovico Sì, chef. Così in fondo alla prima riga c'è un 8 e in fondo alla prima colonna c'è pure un 8.

Chef Bobo Dvornicciuolo E nel riquadro in basso a destra c'è 15.

Chef Alessandra Krucnann Prendi un quadrato Q qualunque sulla scacchiera formato da quadratini. Chiama s la somma dei numeri che compaiono all'interno del quadrato Q. Chiama S la somma i tutti i numeri sulla torta. Quanti sono i quadrati Q tali che s divide S?

24. ***Fagioli 2***

Chef Alessandra Krucnann Vedete i sacchetti vuoti che avete davanti a voi. Dovete scegliere un numero naturale a_1 minore di 10000 e inserire nel sacchetto a_1 fagioli. Poi dovete eseguire la seguente ricetta:

(i) sommare le cifre di a_1 ottenendo un numero a_2;

(ii) inserire nel sacchetto altri a_2 fagioli nel sacchetto;

(iii) sommare le cifre di a_2 ottenendo un numero a_3;

(iv) inserire nel sacchetto altri a_3 fagioli;

e continuare così. Se il numero a_n è di una singola cifra, la somma delle sue cifre è a_n. Vengono eliminati tutti i concorrenti che, a qualche passo della ricetta, avranno nel sacchetto un numero di fagioli multiplo di 2365.

Voce fuori campo PER QUANTI NUMERI a_1 IL SACCHETTO CONTERRÀ, ALL'INIZIO O A UN CERTO MOMENTO DELLO SVOLGIMENTO DELLA RICETTA, UN NUMERO DI FAGIOLI MULTIPLO DI 2365?

Soluzioni per la Coppa Gauss 2018

Un enorme ringraziamento va a tutti coloro che quest'anno, con la solita, pura abnegazione, hanno contribuito a preparare i testi di gara, in particolare: Sandro Campigotto, Andrea Damonte, Veronica Grieco, Simone Muselli, Lorenzo Pollani, Damiano Poletti, Alberto Saracco, Silvia Sconza, Simone Traverso.

Soluzione del problema 1. Dato un numero x maggiore di 2, i casi sono due: è pari o dispari. Nel primo caso il più piccolo fattore primo di x è 2, quindi al passo (iv) si otterrà $2^2 - 1 = 3$ primo. Nel secondo caso, x avrà solo fattori primi dispari, sia a il più piccolo tra questi. Ma $a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$ è un numero pari divisibile per 4. Quindi ricominciando il ciclo, si ricade nel primo caso e si ottiene nuovamente 3. Questo vale per ogni numero maggiore di 2 e risolve il problema.
La risposta è `0003`.

Soluzione del problema 2. Evidentemente ogni colonna è indipendente. Analizziamo quindi una colonna generica. Supponiamo che uno spettatore in fila `A` dica la verità. Allora in particolare quello dietro di lui mente. Dunque quello in fila `C` ha detto la verità, in contraddizione con l'affermazione dello spettatore in fila `A`. Dunque lo spettatore in fila `A` mente, così quello in fila `B` dice il vero, quindi quello in fila `C` mente, e così via... Procedendo in questo modo troviamo che la distribuzione di onesti e bugiardi in ogni colonna risulta unica: quelli nelle file dispari sono bugiardi, mentre quelli nelle file pari dicono la verità: 5 bugiardi per ogni colonna, quindi 50 bugiardi in totale.
La risposta è `0050`.

Soluzione del problema 3. Aprile e maggio sono 61 giorni consecutivi. Dunque i tre giorni della gita possono essere scelti in 59 modi diversi. Il produttore farà in modo che queste 59 triple non contengano il giorno 12 maggio, dunque quelle possibili sono $59 - 3 = 56$. Tra queste quelle incompatibili con il 21 maggio sono $56 - 3 = 53$ (nessuna di queste coinvolge il 12 maggio). Dunque la probabilità richiesta è $\dfrac{53}{56}$.
La risposta è `0109`.

Soluzione del problema 4. Sia $g(x) = f(2x)$. Così $g(0) = 0$ e

$$g(x) - g(x-1) = f(2x) - f(2(x-1)) = f(2x) - f(2x-2) = \frac{2}{5}x - 200.$$

Dunque

$$\begin{aligned} f(2018) &= g(1009) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{1009}(g(k) - g(k-1)) + g(0) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{1009}\left(\frac{2k}{5} - 200\right) \\ &= \tfrac{2}{5}\binom{1010}{2} - 200 \cdot 1009 = 2018. \end{aligned}$$

La risposta è `2018`.

Soluzione del problema 5. Dato che il pane è uniforme, la sua densità è costante. Ai fini della soluzione, dato che la lievitazione agisce uniformemente sull'impasto, possiamo valutare unicamente la variazione di volume a cui è sottoposto $1\,\text{Kg} - 9\,\text{hg} = 1\,\text{hg}$ di massa iniziale della pasta, che è la quantità che rimane alla fine, cioè un decimo del volume iniziale. Ciò coincide a un decimo del suo volume iniziale. Tale volume è V_0. Dopo la n-esima lievitazione, il volume è

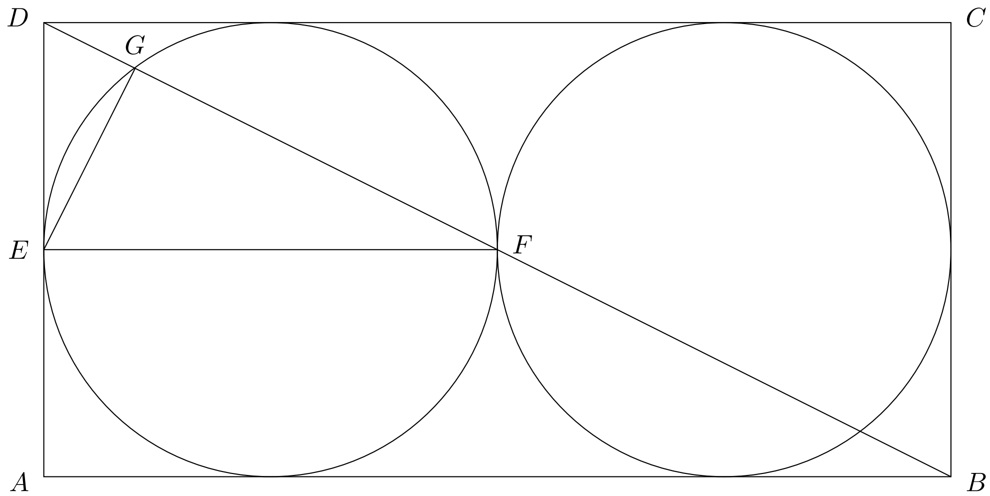
$$V_n = (1 + 1/n)V_{n-1} = \frac{n+1}{n}V_{n-1}.$$

Dunque
$$V_n = (n+1)V_0.$$
Dunque dopo la decima lievitazione il volume della pasta rimasta è $11V_0$, ovvero
$$\frac{11}{10} \cdot 1\,\mathrm{dm}^3 = 1100\,\mathrm{cm}^3$$
La risposta è `1100`.

Soluzione del problema 6. Siano x il numero di concorrenti con il cartoncino verde. Dato che qualche concorrente ha ricevuto il peperoncino, deve essere $x \geq 587$. Chi ha un cartoncino rosso, vede x concorrenti con il cartoncino verde. Chi ha il cartoncino verde, vede $x-1$ concorrenti con il cartoncino verde. Devono essere questi che hanno ricevuto la soia e $x-1 < 587$, cioè $x \leq 587$ da cui $x = 587$ e $2018 - 587 = 1431$.
La risposta è `1431`.

Soluzione del problema 7. Dato che $|s_1 - s_2| = \sqrt{(s_1 - s_2)^2}$ e
$$(s_1 - s_2)^2 = (s_1 + s_2)^2 - 4s_1s_2 = \left(\frac{153}{2}\right)^2 - 4 \cdot 1368 = \frac{1521}{4} = \left(\frac{39}{2}\right)^2$$
si devono sommare i semi-interi tra $\frac{39}{2}$ e $76 = \frac{152}{2}$, estremi inclusi. Perciò la somma è
$$\frac{1}{2}\left[\binom{153}{2} - \binom{39}{2}\right] = \frac{1}{2}(11628 - 741) = 5443.5.$$
La risposta è `5443`.

Soluzione del problema 8. Siano $2h = 30\,\mathrm{m}$ la lunghezza di AD e $4h$ quella di AB. Il punto F di tangenza delle due circonferenze coincide con il centro del rettangolo.



I triangoli DEF e EGF sono simili. Dunque $EF : DF = FG : EF$. Perciò
$$FG = \frac{4h^2}{h\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}h = \frac{4}{\sqrt{5}}15\,\mathrm{m} \approx 2683\,\mathrm{cm}.$$
La risposta è `2683`.

Soluzione del problema 9. Le ricette che si possono fare con s ingredienti sapidi e d ingredienti dolci sono $\binom{4}{s} \cdot \binom{3}{s} \cdot \binom{3}{d} \cdot \binom{2}{d}$. Dato che $0 \leq s \leq 3$, $0 \leq d \leq 2$ e $s + d \geq 0$, i casi da valutare sono 11:

s	d	$\binom{4}{s}\cdot\binom{3}{s}\cdot\binom{3}{d}\cdot\binom{2}{d}$
1	0	12
2	0	18
3	0	4
0	1	6
1	1	72
2	1	108
3	1	24
0	2	3
1	2	36
2	2	54
3	2	12
totale		349

La risposta è `0349`.

Soluzione del problema 10. Dato che i tre numeri devono essere diversi, fissiamo $a = 99 = 11 \cdot 3^2$, $b = 98 = 2 \cdot 7^2$ e vediamo che c si può trovare. Dato che $a \cdot b \cdot c$ è un quadrato perfetto, la fattorizzazione prima di c deve contenere almeno le copie dei fattori mancanti in $a \cdot b$: 11 e 2. Dunque si può usare un multiplo di $2 \cdot 11 = 22$ della forma $22k^2$. Si vede subito che l'unico tale multiplo è $88 = 22 \cdot 2^2$. E $\sqrt{11 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 7^2 \cdot 1 \cdot 11 \cdot 2^2} = 11 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2^2 = 924$. Migliorare il risultato evitando il fattore 99 oppure il fattore 98 è impossibile. Usando soltanto il fattore 99 è necessario utilizzare un altro fattore multiplo di 11 che non sia 88, ma questo è impossibile. Usando soltanto il fattore 98, il migliore fattore restante è $96 = 2^5 \cdot 3$, ma il fattore 3 peggiora la ricerca del terzo fattore della forma $3k^2$. Dato che 97 è primo, $95 = 5 \cdot 19$ e $94 = 2 \cdot 47$ si controlla immediatamente che il risultato non può essere migliorato.
La risposta è `0924`.

Soluzione del problema 11. Bisogna notare che $x^8 + 31x^4 + 256 = x^8 + (2^5 - 1)x^4 + 2^8$. Così

$$\begin{aligned}
x^8 + 31x^4 + 256 &= x^8 + (2^5 - 1)x^4 + 2^8 = x^8 + 2 \cdot 2^4x^4 + 2^8 - x^4 = (x^4 + 2^4)^2 - x^4 \\
&= (x^4 + 2^4 + x^2)(x^4 + 2^4 - x^2) \\
&= (x^4 + 2 \cdot 2^2x^2 + 2^4 - 7x^2)(x^4 + 2 \cdot 2^2x^2 + 2^4 - 9x^2) \\
&= [(x^2 + 2^2)^2 - 7x^2][(x^2 + 2^2)^2 - 9x^2)] \\
&= \left(x^2 + 2^2 + \sqrt{7}x\right)\left(x^2 + 2^2 - \sqrt{7}x\right)\left(x^2 + 2^2 + 3x\right)\left(x^2 + 2^2 - 3x\right)
\end{aligned}$$

I valori cercati sono: $1, 4, \sqrt{7}, 1, 4, \sqrt{7}, 1, 4, 3, 1, 4, 3$. La risposta si ottiene $\frac{4^4 \cdot 3^2 \cdot 7}{100} = 161.28$.
La risposta è `0161`.

Soluzione del problema 12. Sia n il numero estratto da Ludovico. Emanuele viene eliminato se estrae due numeri x e y (necessariamente diversi) tali che $2n = x + y$. Estratto x, restano 99 possibilità per l'estrazione di y. Di queste quelle con la stessa parità sono 49. La probabilità che x e y abbiano la stessa parità e n sia la media di x e y è

$$\frac{1}{100} \cdot \frac{49}{99} = \frac{49}{9900}.$$

La risposta è `9949`.

Soluzione del problema 13. La somma delle pagine del capitolo k è $15 \cdot 7 + 14 \cdot 14(k-1) = 7 \cdot [28(k-1) + 15]$. Perciò, se x è il numero del capitolo strappato, deve essere

$$168 \cdot 337 = 53571 + 7 \cdot [28(x-1) + 15].$$

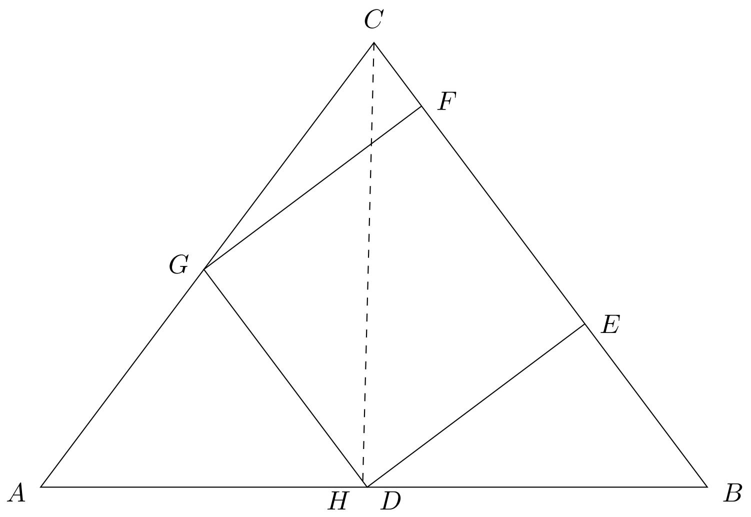
Dunque $x = 16$. La prima pagina è $15 \cdot 14 + 1 = 221$.
La risposta è `0221`.

Soluzione del problema 14. la richiesta equivale a determinare la probabilità che il numero estratto da Emanuele sia strettamente maggiore di un numero estratto dall'insieme S delle posibili somme di due numeri in C, ovvero $S = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ con l'accortezza che $\mathbb{P}(S = 5) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ perchè si può ottenere sommando 1 e 4 oppure 2 e 3—mentre per ogni altro x in S è $\mathbb{P}(S = x) = \frac{1}{6}$.
Indicando con a e b i numeri estratti rispettivamente da Emanuele e la somma estratta da Ludovico, per la formula della probabilità totale si ha che

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(a > b) &= \textstyle\sum_{k=3}^{7} \mathbb{P}(a > b \mid b = k)\mathbb{P}(b = k)\\ &= \textstyle\sum_{k=3}^{7} \mathbb{P}(a > k)\mathbb{P}(b = k)\\ &= \frac{1}{9} + \frac{5}{54} + \frac{4}{27} + \frac{1}{18} + \frac{1}{27} = \frac{24}{54} = \frac{4}{9}\end{aligned}$$

La risposta è `0013`.

Soluzione del problema 15. Siano a la lunghezza del lato obliquo, b la lunghezza della base e h la lunghezza dell'altezza CH del triangolo ABC. Dunque $a = \sqrt{h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$. Sia d la lunghezza del lato del quadrato cercato $DEFG$, sia c la lunghezza del segmento AD. I triangoli ABC e ADG sono simili così come i triangoli AHC e BEH.



Di conseguenza, $d : c = a : b$ e $(b - c) : d = a : h$, cioè

$$\begin{cases} bd - ac = 0 \\ ad + hc = hb \end{cases}$$

che, risolvendo, dà $d = \dfrac{abh}{a^2 + bh} = 120\,\text{mm} = 12\,\text{cm}$—e $c = \dfrac{bd}{a} = 144\,\text{mm}$.
La risposta è `0144`.

Soluzione del problema 16. Le radici del polinomio $q(x) := p(x) - x^2$ sono 1, 2, 3 e 4. Per il teorema di Ruffini

$$q(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4).$$

Dunque $p(5) = q(5) + 25 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 25 = 49$.
La risposta è `0049`.

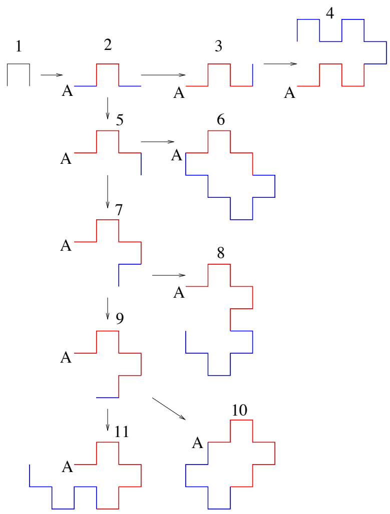
Soluzione del problema 17. Si fissi in $(0, 0)$ il punto di partenza, le uniche posizioni a 10 metri raggiungibili sono $(10, 0)$ e i relativi simmetrici negli altri tre quadranti, $(8, 6)$ e i relativi simmetrici negli altri sette ottanti.
Caso $(10, 0)$, cioè 5 spostamenti da due metri verso Est e 4 che si annullano a 2 a 2: la sequenza non ordinata di 4 spostamenti può essere NNSS, EONS oppure EEOO. Gli anagrammi di

EEEEENNSS sono $\frac{9!}{2! \cdot 2! \cdot 5!} = 9 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6$; gli anagrammi di EEEEEEONS sono $\frac{9!}{6!} = 9 \cdot 8 \cdot 7$; gli anagrammi di EEEEEEEOO sono $\frac{9!}{2! \cdot 7!} = 9 \cdot 4$.
Caso $(8, 6)$, cioè 4 spostamenti verso Est, 3 verso Nord e una coppia di spostamenti che si annullano: la sequenza non ordinata di 2 spostamenti che si annullano può essere NS oppure EO. Gli anagrammi di EEEENNNNS sono $\frac{9!}{4! \cdot 4!} = 9 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 5$; gli anagrammi di EEEEEONNN sono $\frac{9!}{5! \cdot 3!} = 9 \cdot 8 \cdot 7$.
La probabilità richiesta è

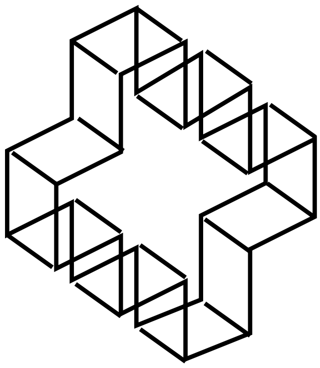
$$4 \cdot \frac{9 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6 + 9 \cdot 8 \cdot 7 + 9 \cdot 4 + 2 \cdot (9 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 5 + 9 \cdot 8 \cdot 7)}{4^9} =$$
$$= 4 \cdot \frac{9 \cdot 4 \cdot 7(3 + 2 + 5 + 4) + 9 \cdot 4}{4^9} = 4 \cdot \frac{9 \cdot 4(98 + 1)}{4^9} = \frac{891}{4^7}.$$

La risposta è `0891`.

Soluzione del problema 18. Dato che uno snodo tiene tre bastoncini in posizioni ortogonali e la dimensione minima della scatola coincide con la lunghezza dei bastoncini, una serie di bastoncini, diciamo in direzione Z, sono paralleli alla dimensione minima della scatola. Gli altri, diciamo X e Y, tra loro ortogonali e ortogonali ai bastoncini Z stanno su due piani paralleli, a distanza 10 cm, poiché la struttura è contenuta in un parallelepipedo retto. Dato che ci sono 32 snodi, ci sono 16 bastoncini X, 16 bastoncini Y e 16 bastoncini Z poiché ad ogni bastoncino corrispondono due snodi e da ogni snodo partono 3 bastoncini, uno per tipo. La figura costituita dai bastoncini X e Y su un piano è uguale alla figura ottenuta dai bastoncini X e Y sull'altro piano ed è un cammino chiuso, fatto da 8 bastoncini X e 8 bastoncini Y che si incontrano negli estremi e sono sistemati in modo alterno. Si tratta ora di capire come sono fatte queste parti di struttura. Fissiamo l'attenzione su un piano. Certamente potremmo isolare due bastoncini Y e un bastoncino X come in 1 della figura allegata (X è il bastoncino orizzontale, Y i due bastoncini verticali). Allora necessariamente dai due estremi liberi dei bastoncini Y devono partire due bastoncini X come in 2. Ora distinguiamo due casi: dall'estremo libero del bastoncino X di destra di 2 parte un bastoncino Y verso l'alto (come in 3) o verso il basso (come in 5). Nel caso 3 le scelte successive sono tutte forzate: il bastoncino successivo che si lega a Y deve andare verso destra, allora il successivo Y deve andare verso l'alto (non può andare verso il basso, perché ci siamo allontanati dal punto A con 4 bastoncini orizzontali e ora tutti i bastoncini orizzontali devono essere usati per tornare verso il punto A), il bastoncino successivo (di tipo X) deve andare verso sinistra, allora quello successivo deve andare verso l'alto e così via. Si ottiene la figura 4 che ha esaurito gli 8 bastoncini X e gli 8 bastoncini Y e non si è chiusa, quindi questa soluzione non va bene. Partiamo allora dal tratto di struttura raffigurata in 5. Il bastoncino Y di destra può essere completato in due modi: inserendo un bastoncino X che va verso destra (6) o verso sinistra (7). Nel caso 6 di nuovo le scelte sono obbligate e si ottiene una figura chiusa. Nel caso 7 il bastoncino successivo è forzato ad essere un bastoncino Y verso il basso. Poi ci sono ancora due possibili scelte, il caso 8 in cui la costruzione è obbligata e il caso 9 che ha due possibilità, una sola delle due (la 10) dà un cammino chiuso. In conclusione la possibile figura sul piano pi_1 è la 6 (o la 10, che sono uguali).



Analoga figura si deve trovare sull'altro piano; quindi la struttura è, a meno di rotazioni,



e la massima distanza tra due vertici della struttura è

$$\sqrt{400^2 + 200^2 + 100^2} = 100\sqrt{21} \approx 458.2576.$$

La risposta è `0458`.

Soluzione del problema 19. Le somme di facce opposte possono essere: 7, 8, 9, 10, 11, 12 e 13. Con somma 7 e con somma 8, le coppie di numeri possibili sono solo 3: $(1, 6)$, $(2, 5)$ e $(3, 4)$ nel primo caso; $(1, 7)$, $(2, 6)$ e $(3, 5)$ nel secondo caso. Si può sempre fare in modo che 1 sia sulla faccia inferiore e 2 sulla faccia anteriore. A questo punto ci sono 2 possibilità per il 3. Gli altri numeri sono univocamente determinati.
Con somma 9, con somma 10 e con somma 11 ci sono quattro coppie possibili: $(1, 8)$, $(2, 7)$, $(3, 6)$ e $(4, 5)$ nel primo caso; $(1, 9)$, $(2, 9)$, $(3, 7)$ e $(4, 6)$ nel secondo caso; $(2, 9)$, $(3, 9)$, $(4, 7)$ e $(5, 6)$ nel terzo caso. Si scelgono 3 coppie in 4 modi possibili, poi le disposizioni sono come in precedenza. In ciascun caso sono 8 in totale.
Con somma 12 e con somma 13 ci sono tre coppie possibili. Dunque ancora 2 possibili dadi in ciascun caso.
I dadi costruibili sono $2 + 2 + 8 + 8 + 8 + 2 + 2 = 32$.
La risposta è `0032`.

Soluzione del problema 20. Contiamo i pareggi: per pareggiare, dato che i colori sono tre, necessariamente devono estrarre lo stesso numero n di fagioli per un certo colore, diciamo rosso. Bisogna ora soltanto determinare in quanti modi ciascuno può estrarre fagioli di un altro colore, diciamo verde: $(10 - n)^2$. I casi di coppie di colori diversi sono $3 \cdot 2$. Però si sono contati tre volte i casi in cui i fagioli sono in numero uguale per tutti e tre i colori (non ci sono casi con fagioli in numero uguale per esattamente due colori): questi sono tanti quante le coppie di numeri naturali (a, b) tali che $a + b \leq 10$, cioè $\binom{11}{2}$. Perciò i pareggi sono

$$3(10^1 + 9^2 + \ldots + 1^2) - 2 \cdot \binom{11}{2} = 3\frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} - 2 \cdot \binom{11}{2} = 1155 - 110$$

Dato che i sorteggi possibili sono $\binom{11}{2}$, la probabilita' di vittoria per Ludovico è

$$\frac{1}{2}\frac{55^2 - 1045}{55^2} = \frac{55^2 - 55 \cdot 19}{55^2 \cdot 2} = \frac{18}{55}.$$

La risposta è `0073`.

Soluzione del problema 21. Per risolvere il problema bisogna considerare i vari casi possibili: il numero massimo di centri che Emanuele può aver fatto è 10, il minimo 3; Veronica può aver fatto al massimo 7 centri, al minimo 0. Si vede subito che non è possibile ottenere risultati uguali con una serie da 3 centri e una da 0, né con una serie da 4 e una serie da 1, né con una serie da 5 e una serie da 2. Per gl altri casi si preparano due tabelle:

	serie migliore	punteggio
3 centri	3	6
4 centri	4	10
5 centri	5	15
6 centri	6	21
7 centri	7	28

	serie peggiore	punteggio
6 centri	2+1+1+1+1	7
7 centri	2+2+2+1	10
8 centri	3+3+2	15
9 centri	5+4	25
10 centri	10	55

Si osserva che solo quando Emanuele fa 8 e 7 centri e Veronica rispettivamente 5 e 4, il punteggio massimo ottenuto da Veronica è maggiore o uguale a quello minimo ottenuto da Emanuele. Ciò significa che i due amici possono aver totalizzato un punteggio di 15 o 10 punti. Dunque la risposta è 1015.
La risposta è `1015`.

Soluzione del problema 22. Sia $n = a10^3 + b10^2 + c10 + d$. Si noti che (3) e (4) non possono avere lo stesso valore.
Supponiamo che (3) sia vera. Ne segue che $a+b+c+d < 9$, (2) è vera, ma inutile, (4) è falsa, (1) è vera, e la prima parte di (6) è falsa. Restano (5) e (6) che non possono essere entrambe false, altrimenti le frasi false sarebbero tante quante quelle vere. Quando (6) è vera, se (5) è vera, allora $d = 4$, $n < 2018$ e $5|n$: assurdo; se (5) è falsa, allora $d \neq 4$, $n < 2018$ e $4|n$. Quando (6) è falsa, allora $n \geq 2018$ e (5) è vera, così $d = 4$ e $4|n$. Il minimo n tra quelli che verificano una delle due possibilità è $n = 8$, il massimo è $n = 4004$.
Supponiamo che (3) sia falsa; i casi sono due: non tutte le frasi precedenti sono vere; $a + b + c + d \geq 9$. In ogni caso, (4) deve essere vera, altrimenti le frasi vere sarebbero meno di quelle false. Di conseguenza (5) e (6) devono essere vere, ma la prima condizione in (6) è falsa. Perciò, $n < 2018$ e $d = 1, 2, 3$ a seconda dei casi.
Calcolare il massimo è inutile perché è sicuramente minore di 2018, dunque minore anche di 4004. Per quanto riguarda il minimo, nel caso che $a + b + c + d \geq 9$, sarà $n > 9 > 8$; nel caso che (1) sia vera (e (2) falsa), $4|n$, $d = 2$ e $n = 12$; nel caso che (2) sia vera (e (1) falsa), $d = 1$ e $n = 11$.
La risposta è `4012`.

Soluzione del problema 23. Sia M la matrice scritta sulla torta. Sia $Q^{i,j}_{n \times n}$ il quadrato in M di dimensione n con vertice alto a sinistra in (i, j), con $1 \leq i, j \leq 9 - n$. È

$$Q^{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 2 & 3 & \ldots & n+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n+1 & \ldots & 2n-1 \end{pmatrix} + (i + j - 2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

e $s = n^3 + (i + j - 2) \cdot n^2$. In particolare $S = 512$.

La richiesta è pertanto di trovare i quadrati Q tali che $s|512 = 2^9$. La condizione diventa $n^2(n+i+j-2)|2^9$. Perciò deve essere in particolare $n|2^4$ e $(n+i+j-2)|2^9$: i valori ammissibili per n sono $1, 2, 4, 8$; i valori ammissibili per $2 \leq i+j \leq 10-n$ sono

$n:$	1	2	4	8
$i+j:$	2	2	2	2
	3	4	6	
	5	8		
	9			

Se $k \leq 8$, i numeri tali che $i+j = k+1$ con $1 \leq i, j \leq 8$ sono k. Perciò in corrispondenza dei valori sopra si ottengono

$$1+1+1+1+2+3+5+4+7+8 = 33$$

quadrati che verificano la condizione richiesta.
La risposta è `0033`.

Soluzione del problema 24. Prima di affrontare la soluzione, è utile un'osservazione generale sulla procedura. La successione di somma delle cifre è decrescente, ovvero $a_{n+1} \leq a_n$ per ogni n; in particolare, $a_{n+1} = a_n$ se e solo se a_n è una cifra e da quel momento in poi la successione è costante, ovvero $a_m = a_n$ se $m \geq n$. Dunque, dopo un certo numero di passi a_n sarà un numero di una cifra; chiamato S il numero di fagioli nel sacchetto in quel momento, quello che ci stiamo chiedendo è quindi che esistano due interi positivi k, h tali che

$$a_n k + S = 2365h, \tag{1}$$

con a_n numero di una cifra. L'equazione ha soluzione se e solo se $\mathrm{MCD}(a_n, 2365)|S$. Scomponendo $2365 = 5 \cdot 11 \cdot 43$ si osserva che, se la cifra $a_n \neq 5$, allora $\mathrm{MCD}(a_n, 2365) = 1$; quindi l'equazione ammette soluzione. Restano perciò da considerare quegli a_1 tali che ad un certo punto la somma ripetuta delle cifre porta ad $a_n = 5$.
Iniziamo ora la soluzione valutando dopo quanti passi si ottiene un numero di una cifra. Si osservi che $a_2 \leq 36$. Se a_3 non è una cifra, sicuramente $a_4 < 5$. Perciò interessano quelle successioni con $a_3 = 5$.
Supponiamo che $a_2 = 5$. Allora $S = a_1 + 5$ e l'equazione (1) ha soluzione se e solo se $5|a_1$. Contiamo gli a_1 non divisibili per 5, cioè quegli $a_1 = A10^3 + B10^2 + C10 + D$ tali che $A + B + C + D = 5$ e D non è 0 e non è 5. Dato che $5 < 10$, gli a_1 che verificano la prima condizione sono $\binom{8}{3}$, quelli con $D = 0$ sono $\binom{7}{2}$, quelli con $D = 5$ sono soltanto il numero 5. Gli a_1 cercati sono perciò

$$\binom{8}{3} - \binom{7}{2} - 1 = 34.$$

Supponiamo che $a_2 \neq 5$. Poiché $a_3 = 5$ ed $a_2 \leq 36$, si ha $a_2 = 14, 23, 32$. Trattiamo separatamente questi tre casi assumendo che a_1 non sia multiplo di 2365, cioè $a_1 \neq 2365, 4730, 7095, 9460$. Consideriamo ancora $a_1 = ABCD$ dove A, B, C, D sono le quattro cifre del numero forse 0.
Caso $a_2 = 14$: Allora $S = a_1 + 14 + 5$ e l'equazione (1) ha soluzione se e solo se $5|a_1 + 14$. Dobbiamo contare gli a_1 con $D \neq 1$ oppure $D \neq 6$. Sia $D = 0$. Se $C = 0$ si hanno 5 casi tali che $A + B = 14$. Se $C = 1$, 6 casi tali che $A + B = 13$. Per $C = 2$, 7 casi tali che $A + B = 12$. Ci sono 10 casi tali che $A + B = 9$ quando $C = 5$, ecc. In totale per $D = 0$ si hanno

$$5+6+7+8+9+10+9+8+7+6 = 75$$

numeri con somma delle cifre 14. Anche se per ora non è richiesto calcoliamo anche il caso $D = 1$. Per lo stesso ragionamento si hanno

$$6+7+8+9+10+9+8+7+6+5 = 75 \quad \text{numeri.}$$

Si prosegue in questo modo per $D = 2$, $D = 3$ e $D = 4$ ottenendo rispettivamente 73, 69 e 63. Per $D = 5, 6, 7, 8, 9$ possiamo riusare la formula delle combinazioni con ripetizione ottenendo rispettivamente $55, 45, 36, 28, 21$. I numeri a_1 minori di 10000 con somma delle cifre 14 e con $D \neq 1$ e $D \neq 6$ sono in totale

$$75 + 73 + 69 + 63 + 55 + 36 + 28 + 21 = 420.$$

Caso $a_2 = 23$: Allora $S = a_1 + 23 + 5$ e l'equazione (1) ha soluzione se e solo se $5|a_1 + 23$. Dobbiamo contare gli a_1 con $D \neq 2$ e $D \neq 7$. Sia $\tilde{a}_1 = 9999 - a_1$ il complemento a 9 delle cifre $ABCD$: la somma delle cifre di $\tilde{a}_1$ è $36 - 23 = 13$. Quindi il problema coincide con quello di contare gli $\tilde{a}_1$ con somma 13 e con $D \neq 9 - 2 = 7$ e $D \neq 9 - 7 = 2$. Sia $D = 0$: contare i numeri con somma delle cifre 13 che finiscono per 0 è come contare i numeri che hanno somma 14 e finiscono per 1, che abbiamo già contato! E questo vale per $D = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. Manca solo da contare $D = 9$ che però possiamo fare ancora una volta con la formula delle combinazioni con ripetizione ottenendo $\binom{6}{2} = 15$. Pertanto i numeri a_1 con somma delle cifre 23 e con $D \neq 2$ e $D \neq 7$ sono

$$75 + 73 + 63 + 55 + 45 + 36 + 21 + 15 = 383.$$

Caso $a_2 = 32$: Dobbiamo contare gli a_1 con $D \neq 3$ e $D \neq 8$. Operiamo come prima e troviamo gli $\tilde{a}_1$ con somma delle cifre 4 e $D \neq 1$ oppure $D \neq 6$. Usando la formula delle combinazioni con ripetizione si ottengono subito

$$\binom{7}{3} - \binom{5}{2} - 0 = 25 \quad \text{numeri.}$$

Togliendo da tutti i numeri quelli che abbiamo osservato non andare bene si ottiene quindi

$$9999 - 34 - 420 - 383 - 25 = 9137.$$

Però non abbiamo finito. Abbiamo infatti assunto che a_1 non fosse un multiplo di 2365. Chiaramente tutti questi numeri soddisfano la richiesta; è possibile che li abbiamo tolti? Noi infatti siamo andati subito a sommare le cifre, ma questi numeri funzionano all'inizio della procedura. Analizziamo quindi separatamente questi multipli. Se $a_1 = 2365$ allora $a_2 = 16$ e $a_3 = 7$: non è stato tolto. Se $a_1 = 4730$ allora $a_2 = 14$: questo è stato tolto! Deve essere quindi aggiunto di nuovo. Se $a_1 = 7095$, allora $a_2 = 21$ e $a_3 = 3$: non è stato tolto. Infine se $a_1 = 9460$ allora $a_2 = 19$, $a_3 = 10$ e $a_4 = 1$: non è stato tolto.
Pertanto la risposta sarà $9137 + 1 = 9138$.
La risposta è `9138`.